

# Mécanique des structures

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Dr. Alain Prenleloup  
SGM BA3 2024-2025

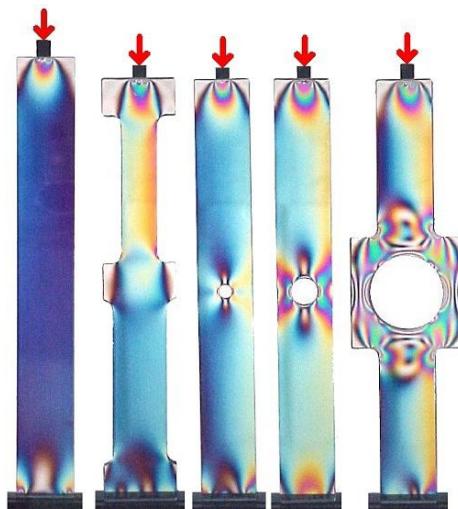
**EPFL**



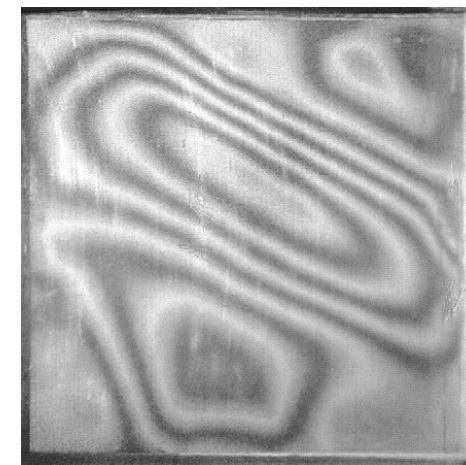
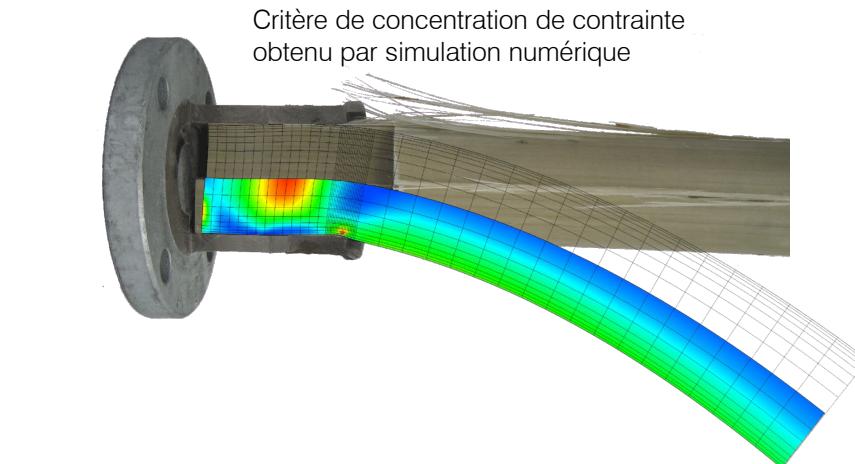
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Exemple de visualisation de l'état de contrainte



Visualisation des contraintes internes par des sources de lumière polarisée



Interférence de Moiré d'une plaque sous contrainte

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Analyse de l'état de contrainte

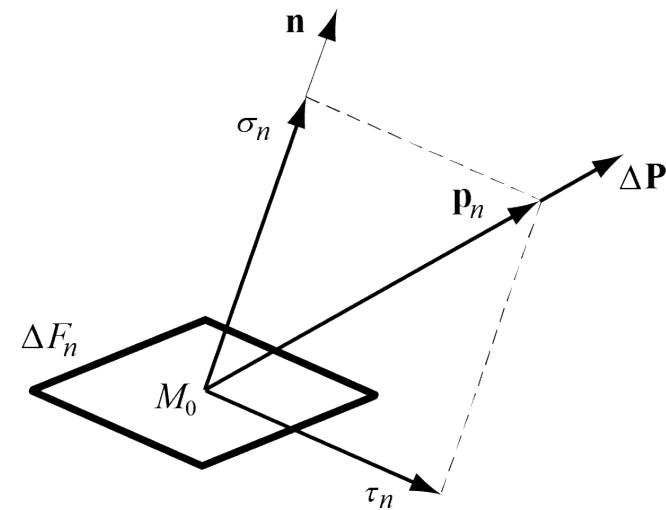
Les contraintes autour d'un point  $M_0$  d'un milieu continu sont, par définition, les forces spécifiques agissant sur les éléments de surface passant par ce point

Soit  $\Delta F_n$  un élément de surface passant par  $M_0$ , de vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$ , sur lequel agit une force élémentaire  $\Delta \mathbf{P}$ .

La contrainte  $\mathbf{p}_n$  sur cet élément de surface, repéré par le vecteur  $\mathbf{n}$ , a donc pour valeur

- $\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta F_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta F_n} = \frac{d\mathbf{P}}{dF_n}$

La contrainte normale sur l'élément de surface  $\Delta F_n$  est la projection  $\sigma_n$  de la contrainte  $\mathbf{p}_n$  sur la normale  $\mathbf{n}$ , tandis que la contrainte tangentielle sur cet élément est la composante  $\tau_n$  de  $\mathbf{p}_n$  dans le plan de  $\Delta F_n$



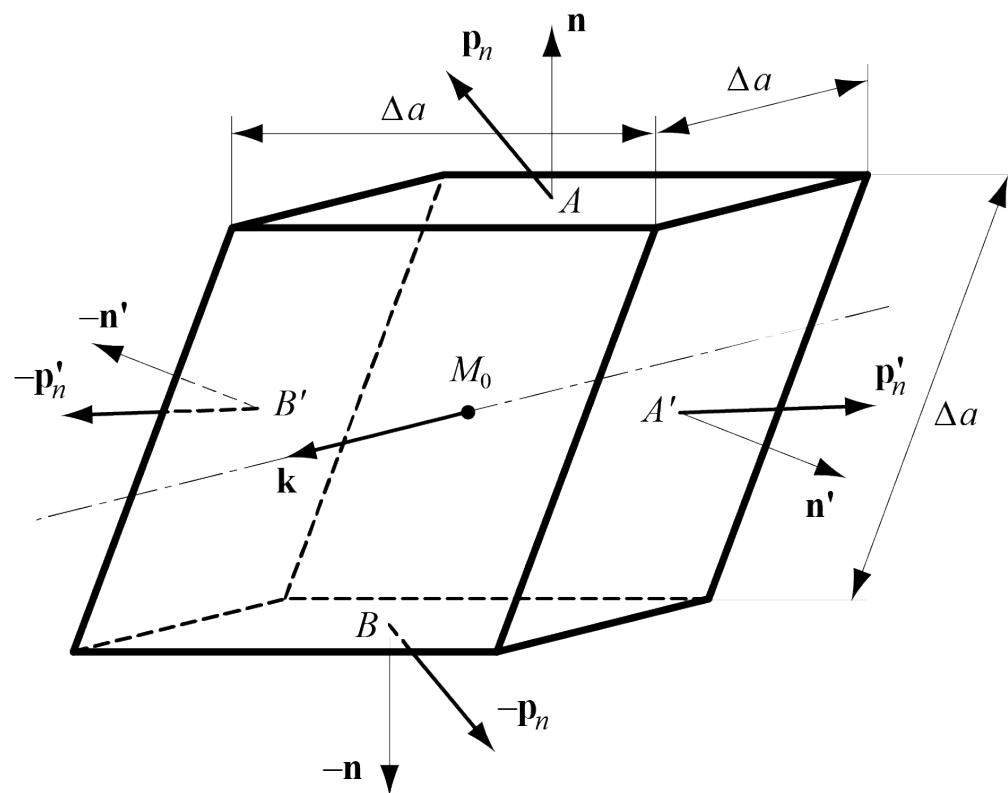
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Analyse de l'état de contrainte

Théorème de Cauchy : *La projection d'une contrainte  $p_n$ , relative à une face de normale  $n$ , sur la normale  $n'$  d'une autre face passant par le même point  $M_0$  d'un milieu continu est égale à la projection de la contrainte  $p'_n$ , relative à la face de normale  $n'$ , sur la normale  $n$*

- $p_n \cdot n' = p'_n \cdot n$

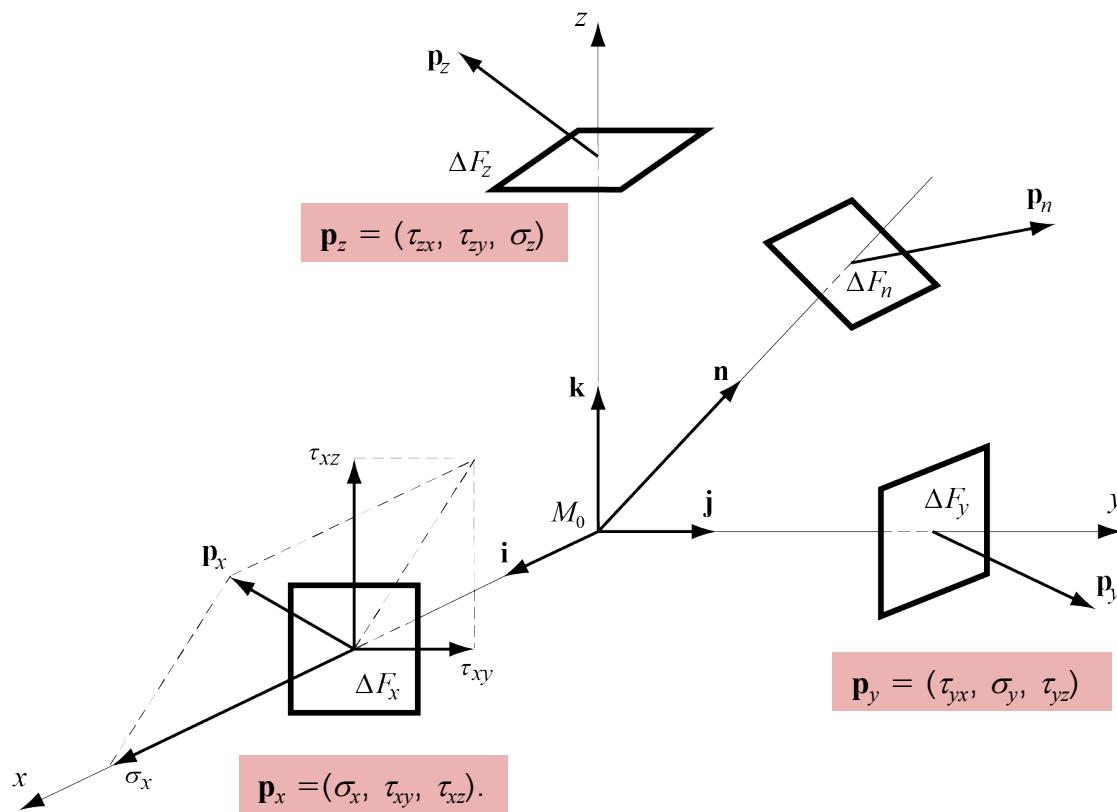


$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrice de contrainte

Par le point  $M_0$ , faisons passer trois axes perpendiculaires  $M_0x$ ,  $M_0y$  et  $M_0z$ , de vecteurs unitaires respectifs  $i$ ,  $j$  et  $k$ . Sur les trois éléments de surface  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$  et  $\Delta F_z$ , perpendiculaires aux axes, agissent respectivement les contraintes  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$  et  $\mathbf{p}_z$ . Ces éléments de surface passent par le point  $M_0$ , mais ils sont représentés séparément sur la figure pour plus de clarté



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrice de contrainte

La contrainte  $\mathbf{p}_x$  a pour composantes  $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ . De même, les composantes de  $\mathbf{p}_y$  et  $\mathbf{p}_z$  sont respectivement  $(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})$  et  $(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$ . Il est évident qu'en raison du théorème de Cauchy, ces neuf composantes ne peuvent pas être toutes indépendantes

- $\mathbf{p}_y \cdot \mathbf{i} = \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{j}$   $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
  - $\mathbf{p}_z \cdot \mathbf{j} = \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{k}$   $\tau_{zy} = \tau_{yz}$
  - $\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{i}$   $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

## Sous forme matriciel

- $$\bullet \quad \mathbf{p}_n = \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \cdot \mathbf{n}$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrice de contrainte

La grandeur  $\Gamma_\sigma$  est appelée matrice du tenseur des contraintes ou plus simplement matrice des contrainte

- $\Gamma_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$

Notons que la matrice  $\Gamma_\sigma$  est symétrique en vertu du théorème de Cauchy. Or, il est toujours possible de transformer une matrice symétrique en matrice diagonale par rotation appropriée des axes. La matrice  $\Gamma_\sigma$  peut donc être diagonalisée sous la forme

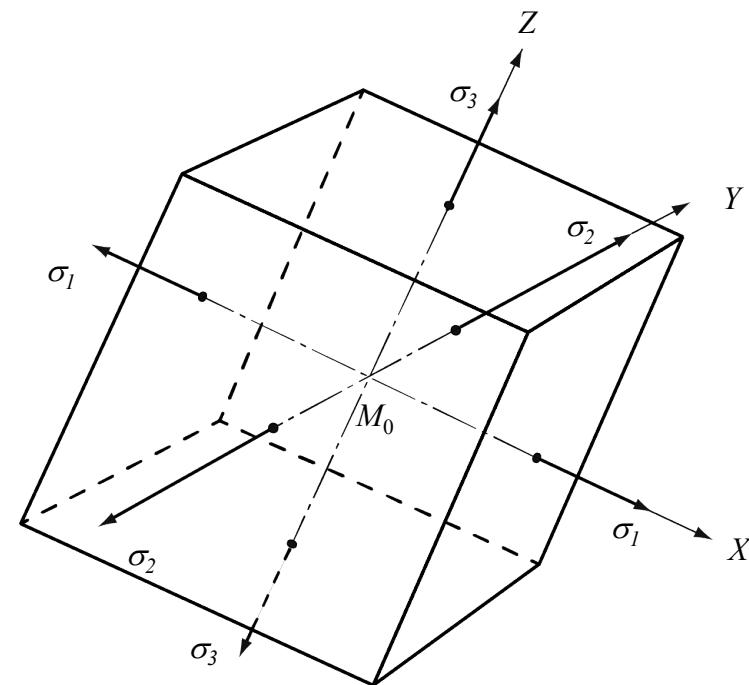
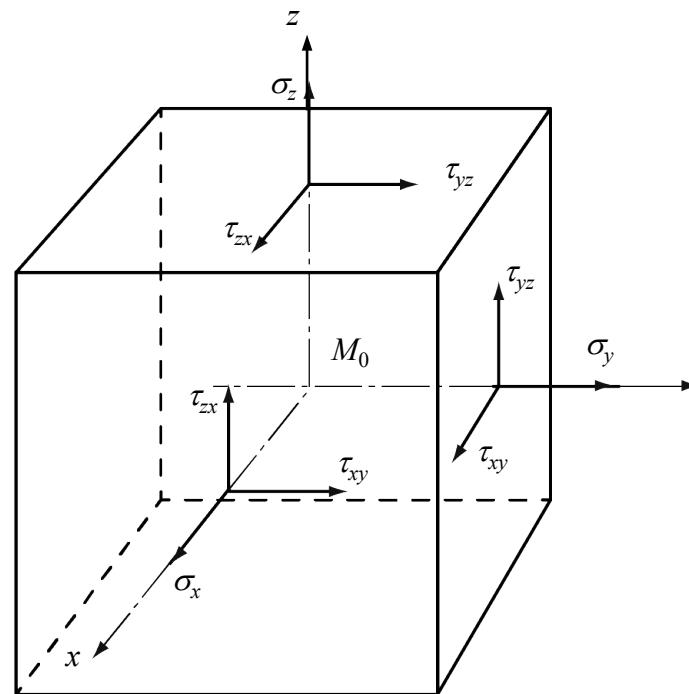
- $\Gamma'_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrice de contrainte

Les contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont portées par les axes principaux et sont normales aux faces principales conformément à l'algèbre linéaire, elles correspondent aux valeurs propres de la matrice des contraintes et sont donc des extrema des contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Relevons enfin que les contraintes tangentielles sont nulles sur les faces principales, comme le montre la matrice  $\Gamma'_\sigma$



# Mécanique des structures

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Dr. Alain Prenleloup  
SGM BA3 2024-2025

**EPFL**



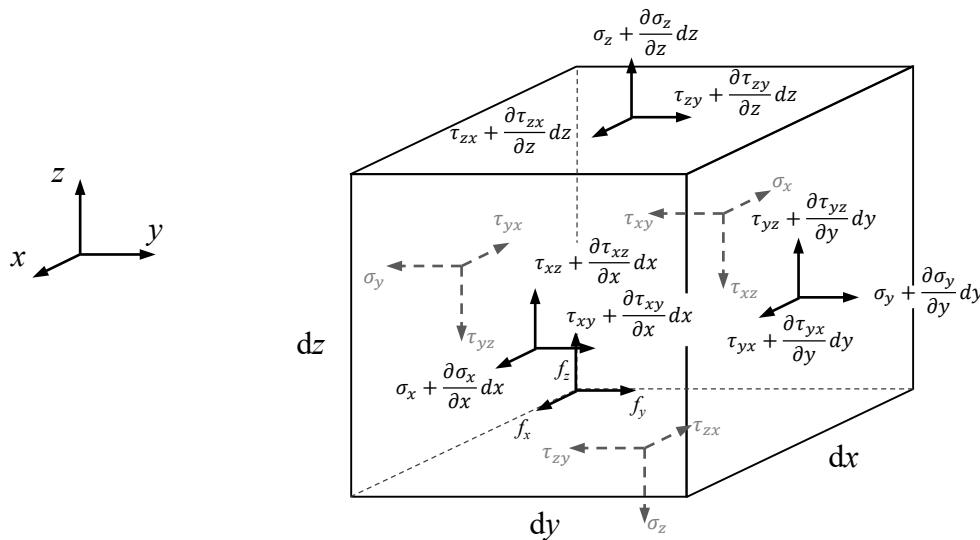
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Équation d'équilibre

Considérons maintenant un élément infinitésimal hexaédrique droit de volume  $dV = dx dy dz$  dont l'état de contrainte n'est plus considéré comme homogène, centré au point  $M_0(x, y, z)$  et dont les faces sont orientées selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  et soumis à des forces volumiques d'amplitudes  $f_x$ ,  $f_y$ , et  $f_z$ .

Le champs de contrainte est alors non-uniforme



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Équation d'équilibre

Si les contraintes sont des fonctions continûment différentiables des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , cet accroissement peut-être déterminé à partir d'un développement de Taylor limité au premier ordre

- $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, y, z)dx$
- $\tau_{xy}(x + dx, y, z) = \tau_{xy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}(x, y, z)dx$
- $\tau_{xz}(x + dx, y, z) = \tau_{xz}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}(x, y, z)dx$

On peut écrire les conditions d'équilibre des forces appliquées sur le parallélépipède infinitésimal  $dV$ . La somme des six composantes issues des forces surfaciques dérivées des contraintes et de la composante découlant de la charge volumique correspondante doit s'annuler. Selon  $M_0x$  par exemple :

- $$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Equation d'équilibre

En divisant par le volume infinitésimal  $dxdydz$  et en procédant de manière identique selon  $M_0y$  et  $M_0z$  on aboutit finalement aux trois relations générales qui constituent les équations d'équilibre.

- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

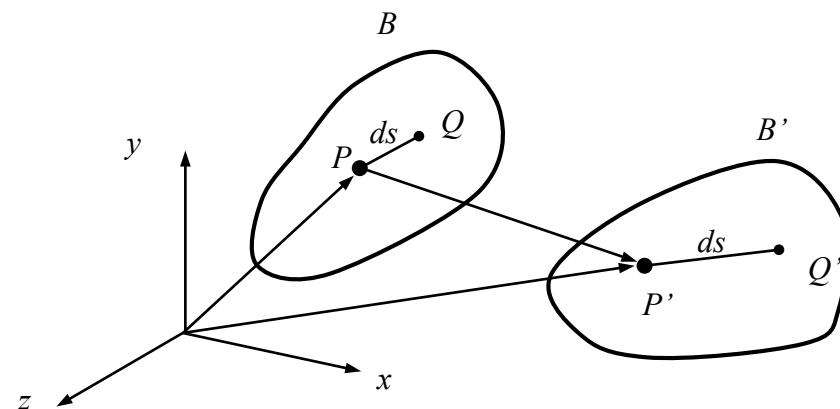
# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

Soit un point  $P(x,y,z)$  d'un corps  $B$  occupant un volume dans l'espace. Lorsqu'il est déformé, le corps occupe une nouvelle configuration  $B'$  appelée configuration déformée.

- $x' = x + u(x, y, z)$
- $y' = y + v(x, y, z)$
- $z' = z + w(x, y, z)$

$u, v, w$  sont les composantes du vecteur de déplacement  $\overrightarrow{PP'}$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

Soit  $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$  un point infiniment proche de  $P$ . Après déformation  $Q$  devient  $Q'$

- $x' + dx' = x + dx + u + du$
- $y' + dy' = y + dy + v + dv$
- $z' + dz' = z + dz + w + dw$

Le déplacement du point  $Q$  peut être exprimé par un développement de Taylor dans le voisinage de  $P'$

- $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$
- $v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$
- $w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

En substituant ces équations dans les relations qui expriment les coordonnées du point  $Q'$  et dans  $P'$  (on ne présente que la solution de la première équation)

- $dx' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

Ces équations étant linéaires en  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , elles peuvent être considérées comme représentant la transformation linéaire de  $\overrightarrow{PQ}$  en  $\overrightarrow{P'Q'}$ . L'incrément de déplacement vaut alors

- $du = dx' - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

La longueur au carré de ces éléments peut alors exprimée par

- $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- $ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$   
 $= dS^2 + 2e_x dx^2 + 2e_y dy^2 + 2e_z dz^2 + 4(e_{xy} dx dy + e_{yz} dy dz + e_{zx} dz dx)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

Ce qui permet de définir les éléments du tenseur de déformation *d'Euler-Almansi e*

- $e_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$
- $e_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$

En se limitant aux petites déformations, les déplacements ont des dérivées petites et donc les produits peuvent être négligés. De sorte que le tenseur *e* peut être approché par le tenseur de déformation infinitésimal *ε*

- $e_x \cong \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$
- $e_{xy} \cong \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

La longueur d'un élément infinitésimal est alors donnée par

- $ds^2 = dS^2 + 2\varepsilon_x dx^2 + 2\varepsilon_y dy^2 + 2\varepsilon_z dz^2 + 4(\varepsilon_{xy} dxdy + \varepsilon_{yz} dydz + \varepsilon_{zx} dzdx)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

En plus des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  définies, l'éléments  $dS$  subit une rotation qui peut être exprimée par le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$

- $\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \omega_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$

Ce qui permet d'expliquer les coordonnées du point  $P'$  et du vecteur déplacement de  $\overrightarrow{PP'}$  (seul les premiers termes sont explicités ici)

- $dx' = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = (1 + \varepsilon_x)dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_{yx})dy + (\varepsilon_{xz} - \omega_{zx})dz$
- $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_{yx})dy + (\varepsilon_{xz} - \omega_{zx})dz$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Matrices des déformations

Ce qui permet d'écrire la relation matriciel

- $$\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

On a ainsi défini la *matrice de déformations*  $\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon$  (déformation infinitésimales au point  $P$ ) et la *matrice de rotations*  $\boldsymbol{\Omega}$  (rotations infinitésimales d'un segment  $PQ$ )

# Mécanique des structures

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Dr. Alain Prenleloup  
SGM BA3 2024-2025

**EPFL**



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

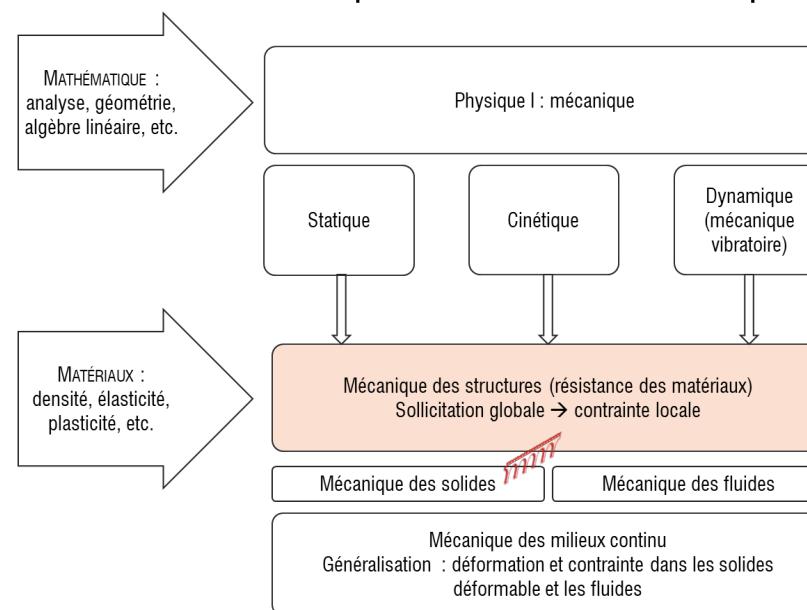
# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Introduction aux éléments d'élasticité linéaire

La théorie de l'élasticité est applicable dans un grand nombre de cas pratique, les déformations étant généralement suffisamment petites pour que le recours à la loi de Hooke soit justifié (en particulier pour les métaux et les céramiques).

Il faut aussi relever que la théorie de l'élasticité jette les fondements de la mécanique des solides et est à la base de l'élasticité non-linéaire, de la viscoélasticité et de l'élastoplasticité.

On se contentera ici de décrire les équations de base pour un matériau isotrope



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

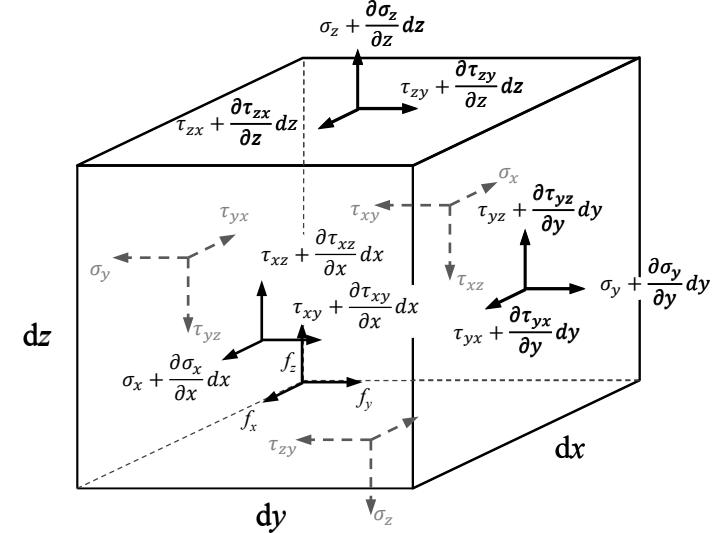
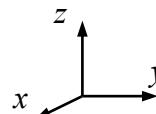
# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

La **théorie de l'élastostatique** pour un matériau isotrope, homogène et linéaire, soumis à des forces volumiques ainsi qu'à des déplacement ou des charges imposés sur sa frontière, se base sur l'utilisation des **15 équations** décrites ci-après.

3 équations d'*équilibre*

- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$



Équilibre des forces dans les 3 directions (**chapitre 1 : équilibre intérieur d'un solide**)

- $\mathbf{R} = \sum \mathbf{P}_j$

Équilibre des moments de force à conduit à pouvoir écrire  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

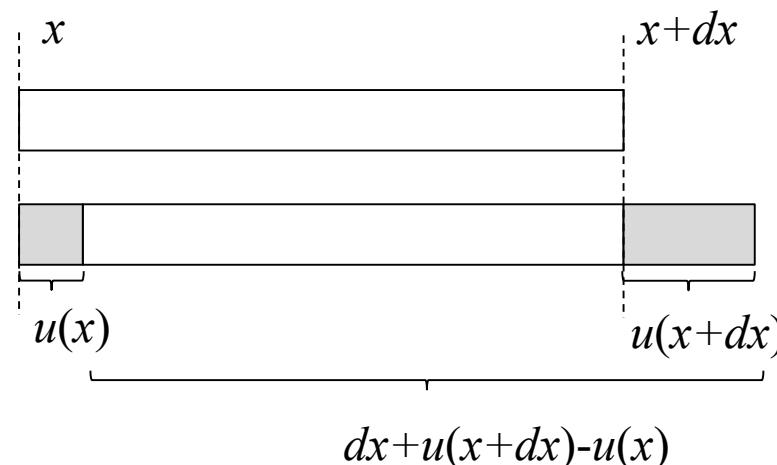
6 équations définissant la relation *déformation-déplacement*

(3 normales + 3 tangentialles)

- $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$        $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$        $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

Déformation relative (chapitre 2 : traction ou compression simple)

- $\varepsilon = \frac{\text{allongement}}{\text{longueur initiale}} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{[dx + u(x+dx) - u(x)] - dx}{dx} \cong \frac{[u(x) + u'(x)dx - u(x)]}{dx} = u'(x) = \frac{du}{dx}$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

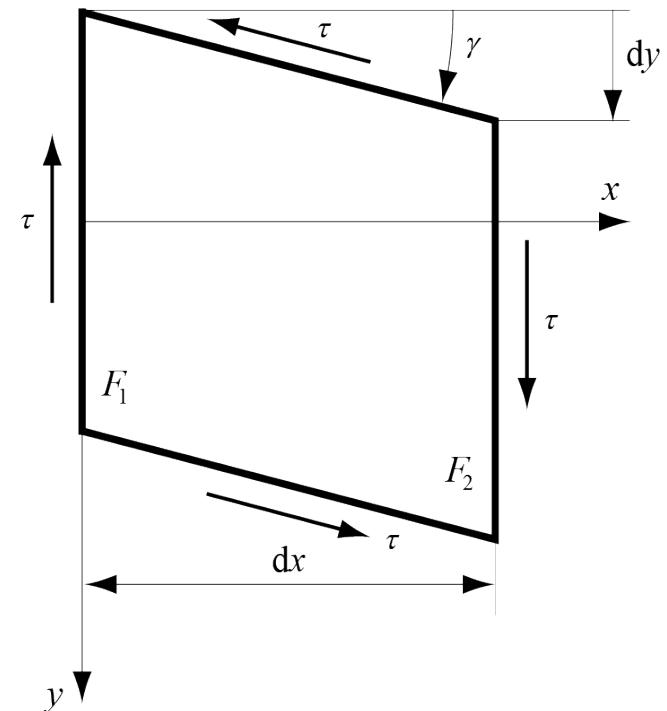
6 équations définissant la relation *déformation-déplacement*

(3 normales + 3 tangentialles)

- $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$        $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$        $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

Angle de glissement (chapitre 4 : cisaillement simple)

- $\gamma = \frac{dx}{dy}$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation*  $\rightarrow$  3 comp. normales

- $\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z]$
- $\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [\mu\varepsilon_x + (1-\mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z]$
- $\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [\mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + (1-\mu)\varepsilon_z]$

Ou

- $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu\sigma_y - \mu\sigma_x]$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation*  $\rightarrow$  3 comp. normales

- $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z]$
- $\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z]$
- $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \sigma_y - \mu \sigma_x]$

### Chapitre 3 : Etat de contrainte bidimensionnel

	Allongement selon $M_0x$	Allongement selon $M_0y$	Allongement selon $M_0z$
Effet selon $\sigma_x$	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet selon $\sigma_y$	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Effet selon $\sigma_z$	$\varepsilon_{xz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{yz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation*  $\rightarrow$  3 comp. tangentielle

- $\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$
- $\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz}$
- $\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx}$

Ou

- $\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$
- $\gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$
- $\gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$

Angle de glissement (chapitre 4, 5 et 6 : cisaillement, torsion, flexion)

- $\gamma = \frac{\tau}{G}$
- $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation*

$$\bullet \quad \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

$$\bullet \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

## Conditions aux limites

Le système d'équation précité ne peut être résolu que si les conditions aux limites appropriées sont imposées.

Considérons que le solide, occupant un domaine  $V$ , possède une frontière  $S$  que l'on peut diviser en deux parties ( $S = S_u \cup S_t$ ).

La partie  $S_u$  représentant la partie de surface sur laquelle des composantes de déplacement  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont imposées aux valeurs respectives  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$

- $u = \bar{u}$        $v = \bar{v}$        $w = \bar{w}$       ← conditions aux limites naturelles

La partie  $S_t$  représentant la partie de surface sur laquelle des composantes de traction  $t_x$ ,  $t_y$  et  $t_z$  sont assignées aux valeurs respectives  $\bar{t}_x$ ,  $\bar{t}_y$  et  $\bar{t}_z$

- $t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x$
- $t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = \bar{t}_y$       ← conditions aux limites essentielles
- $t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = \bar{t}_z$

Où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont les normales unitaires extérieures à la surface

# Mécanique des structures

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Dr. Alain Prenleloup  
SGM BA3 2024-2025

**EPFL**



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Cercles de Mohr

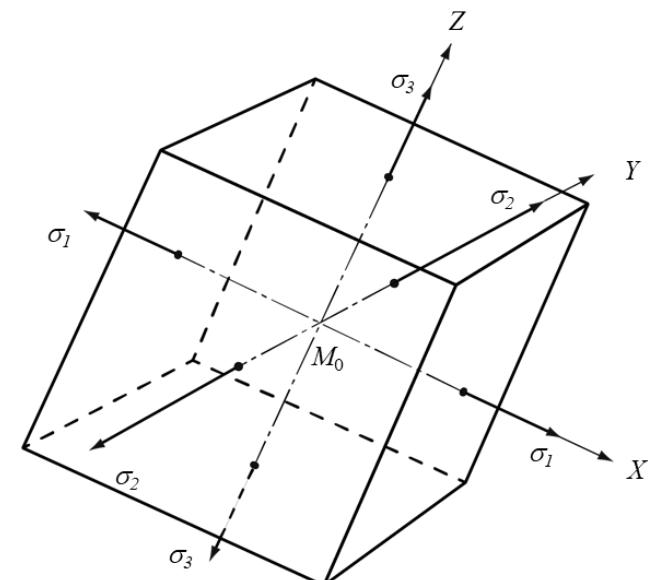
Dans le système  $M_0XYZ$  des axes principaux, choisis de manière que les contraintes principales soient classées comme suit :  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Le module  $p_n$  de la contrainte  $\mathbf{p}_n$  peut être calculé à partir de

- $|\mathbf{p}_n|^2 = p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 = (\alpha\sigma_1)^2 + (\beta\sigma_2)^2 + (\gamma\sigma_3)^2$

Écrivons les équations permettant d'établir les conditions devant être remplies par les composantes  $\sigma_n$  et  $\tau_n$  pour correspondre à des valeurs réelles de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$

- $\sigma_1^2\alpha^2 + \sigma_2^2\beta^2 + \sigma_3^2\gamma^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$
- $\sigma_1\alpha^2 + \sigma_2\beta^2 + \sigma_3\gamma^2 = \sigma_n$
- $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Cas particulier de l'état de contrainte

En travaillant sur ce système d'équation on peut finalement exprimer

- $(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$

Dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , les trois égalités apparaissant dans les relations constituent des équations de cercles, connus sous le nom de *cercles de Mohr*, de diamètres  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  et  $(\sigma_2 - \sigma_3)$  et de centres  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ ,  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  et  $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$  situés sur l'axe des contraintes normales  $\sigma$ .

Les trois inégalités sont dès lors satisfaites pour tout point se trouvant dans la zone hachurée comprise entre ces cercles

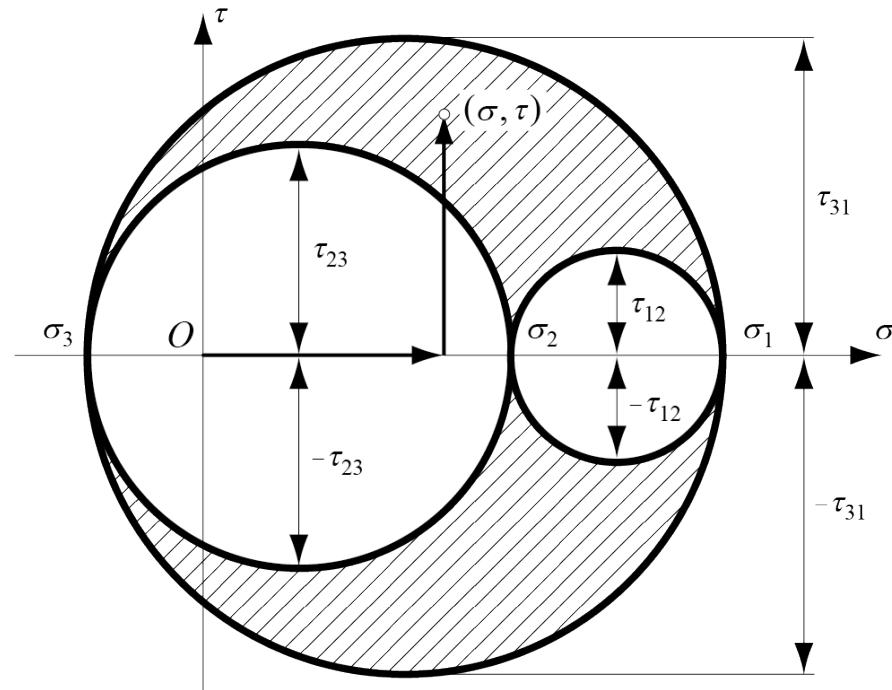
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Cas particulier de l'état de contrainte

En travaillant sur ce système d'équation on peut finalement exprimer

- $(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

# Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

## Cas particuliers de l'état de contrainte

**Trois contraintes principales égales** : cet état de contrainte est réalisable pratiquement d'une façon presque parfaite en immergeant un solide isotrope, sans cavités intérieures, dans un fluide à pression constante :  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_0$

**Deux contraintes principales égales** : si les forces extérieures et le solide possèdent un axe de symétrie passant par le point  $M_0$ , deux des contraintes principales sont égales. Dans ce cas, un des cercles de Mohr dégénère en un point et les deux autres sont confondus. La symétrie axiale permet donc de ramener l'étude des contraintes à un problème plan

**Une contrainte principale nulle** : si l'une des contraintes principales est nulle, deux des cercles de Mohr sont tangents à l'axe des  $\tau$  et l'état de contrainte est plan ou bidimensionnel. Un tel état de contrainte a été analysé en détails au chapitre 3.

**Deux contraintes principales nulles** : si deux des contraintes principales sont nulles, un des cercles de Mohr dégénère en un point situé à l'origine, tandis que les deux autres cercles coïncident et passent par l'origine. L'état de contrainte est alors mono-axial ou unidimensionnel. Ce cas très particulier est en fait celui de la traction ou de la compression pure étudiée au chapitre 2.